



گزینه ۲

۱

با استفاده از ویژگی $\log_b^{a^n} = n \log_b^a$ تغییراتی در عبارت $2 \log(1 + \sqrt{5})$ ایجاد می کنیم.

$$2 \log(1 + \sqrt{5}) = \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(1 + 2\sqrt{5} + 5) = \log(6 + 2\sqrt{5})$$

برای محاسبه حاصل عبارت داده شده از ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} A &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) \\ &= \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 \xrightarrow{\log 2 = k} A = 4k \end{aligned}$$

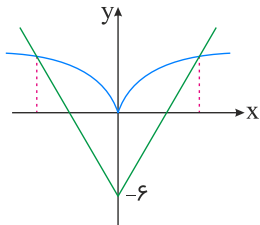
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گزینه ۱

۲

$\sqrt{|x|}$ برای تابع مشکلی ایجاد نمی کند.

$$6 + \sqrt{|x|} - |x| > 0 \Rightarrow \sqrt{|x|} > |x| - 6$$



$$\sqrt{|x|} = |x| - 6 \xrightarrow{|x|=t} \sqrt{t} = t - 6 \Rightarrow t = 9 \Rightarrow |x| = 9 \Rightarrow x = \pm 9$$

پس جواب $(-9, 9)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

اگر جمعیت اولیه x نفر باشد، سال اول $\frac{99}{100}x$ و سال دوم $\left(\frac{99}{100}\right)^2 x$ و سال n ام $\left(\frac{99}{100}\right)^n x$ نفر خواهد بود.

$$\left(\frac{99}{100}\right)^n x = \frac{1}{2}x \Rightarrow \left(\frac{100}{99}\right)^n = 2$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{100}{99}\right)^n = \log 2 \Rightarrow n (\log 100 - \log 99) = \log 2$$

$$\Rightarrow n = \frac{0.3}{2 - 1.995} = 60$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

مختصات نقاط $(-1, 0)$ و $(0, 2)$ را در ضابطه تابع جایگذاری می‌کنیم و با استفاده از دستگاه معادلات، a و b را به دست می‌آوریم.

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0, \quad a\left(\frac{1}{2}\right)^0 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \xrightarrow{-} a = -2, \quad b = 4$$

ضابطه تابع f را نوشته و مقدار تابع را در $x = 1$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 \Rightarrow f(1) = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 3$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

نمودارهای دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، پس:

$$\begin{aligned} f(-1) = g(-1) &\Rightarrow 3^{-a+b} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \\ &\Rightarrow 3^{-a+b} = 9 = 3^2 \Rightarrow -a + b = 2 \quad (*) \end{aligned}$$

از طرفی $f(2) = \frac{1}{3}$ ، بنابراین:

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a + b = -1 \quad (**)$$

از حل دستگاه معادلات $(*)$ و $(**)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = 1 \Rightarrow f(x) = 3^{-x+1}$$

حال برای محاسبه $f^{-1}(27)$ ، کافی است معادله $f(x) = 27$ را حل کنیم:

$$3^{-x+1} = 27 = 3^3 \Rightarrow -x + 1 = 3 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f^{-1}(27) = -2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{cases} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} \times 2^{\frac{x}{2}} + 4 \xrightarrow{2^{\frac{x}{2}}=t} t^2 = \sqrt{2}t + 4 \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ غق}$$

$$2^{\frac{x}{2}} = t \xrightarrow{t=2\sqrt{2}} 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2^3 = 8$$

$$d = \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}, \log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a, \log_a a = 1$$

ب) در تابع لگاریتمی $y = \log_b a$ ، همواره باید $a > 0$ و $b = 1$ باشد.

گام دوم

ابتدا با حل معادله لگاریتمی داده‌شده، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow \log(x - 3)(x + 2) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow \log \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)} = \log(2x - 5) \Rightarrow \log(x + 2) = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow x + 2 = 2x - 5 \Rightarrow x = 7$$

به ازای $x = 7$ تمام لگاریتم‌ها تعریف شده پس این مقدار قابل قبول است. حال مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴ را به ازای $x = 7$ حساب می‌کنیم:

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} = \log_4 \sqrt[3]{7+1} = \log_4 \sqrt[3]{8} = \log_4 \sqrt[3]{2^3} = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

با استفاده از فرضیات بیان‌شده در صورت سؤال، مقدار a^3 را به دست می‌آوریم.

$$\log_{\sqrt[3]{3}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow \log_{3^{\frac{1}{3}}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}} \log_3 a = \frac{4}{3} \Rightarrow 3 \log_3 a = \frac{4}{3} \Rightarrow \log_3 a = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^{\frac{c}{\log_b a}}} a = 3^{\frac{4}{9}} \Rightarrow a^3 = (3^{\frac{4}{9}})^3 = 3^4 = 81$$

با استفاده از ویژگی $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$ حاصل لگاریتم $(a^3 + 7)$ را در مبنای ۸ حساب می‌کنیم:

$$\log_8 (a^3 + 7) = \log_8 (81 + 7) = \log_8 88 = \log_{2^3} 88 = \frac{4}{3} \log_2 88 = \frac{4}{3}$$

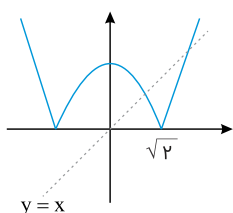
$$A = \log_{\frac{1}{\sqrt{25}}} \sqrt[3]{\frac{1}{25}} \xrightarrow{\sqrt[3]{\frac{1}{25}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{-\frac{1}{3}}} \log_{5^{-\frac{1}{3}}} 5^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \log_{5^{-\frac{1}{3}}} 5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}-1} \xrightarrow{A=\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}-1} = \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

$$|x^2 - 2| - x > 0 \Rightarrow |x^2 - 2| > x \quad (1)$$

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که یک برخورد در بازه $(0, \sqrt{2})$ و یک برخورد در بازه $(\sqrt{2}, +\infty)$ است:

$$0 < x < \sqrt{2} : |x^2 - 2| = 2 - x^2$$

$$\Rightarrow 2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} x = 1$$

$$x > \sqrt{2} : |x^2 - 2| = x^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{x > \sqrt{2}} x = 2$$

پس جواب نامعادله (۱) که همان دامنه تابع است به صورت زیر خواهد بود:

$$D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\begin{aligned}
 (0/4)^{2x-1} &= \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} \\
 \Rightarrow \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} &= \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{x^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3x^2} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-3x^2} \\
 \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{2x-1} &= \left(\frac{4}{10}\right)^{-3x^2} \Rightarrow -3x^2 = 2x - 1 \\
 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ.ق.ق} \\ x = \frac{1}{3} & \text{ق.ق} \end{cases}
 \end{aligned}$$

به ازای $x = -1$ عبارت $\log_{\lambda}^{(9x+1)}$ تعریف نشده است.
برای $x = \frac{1}{3}$ داریم:

$$\log_{\lambda}^{(9x+1)} = \log_{\lambda}^{(9 \times \frac{1}{3} + 1)} = \log_{\lambda}^4 = \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

دو تابع در نقطه A متقاطع هستند؛ بنابراین در این نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. با مساوی قرار دادن ضابطه دو تابع نقطه برخورد را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} &= 3^x + \frac{1}{3} \Rightarrow \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{2x} = 3^x + \frac{1}{3} \\
 \Rightarrow 3^{-x} &= 3^x + \frac{1}{3} \xrightarrow{3^{-x}=t} t = \frac{1}{t} + \frac{1}{3} \xrightarrow{\times t} t^2 = 1 + \frac{1}{3}t \\
 \xrightarrow{\times 3} 3t^2 &= 3 + \lambda t \Rightarrow 3t^2 - \lambda t - 3 = 0 \\
 \Delta &= (-\lambda)^2 - 4(3)(-3) = \lambda^2 + 36 = 100 \\
 \begin{cases} t_1 = \frac{\lambda + 10}{6} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow 3^{-x} = 3 \Rightarrow x = -1 \\ t_2 = \frac{\lambda - 10}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases} & \text{غ.ق.ق}
 \end{aligned}$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 3$$

بنابراین نقطه برخورد دو تابع نقطه $A(-1, 3)$ است.
فاصله نقطه $A(-1, 3)$ از نقطه $(-1, 1)$ برابر با $3 - 1 = 2$ است.

با استفاده از معادله $\log(y + 2) = 1$ به آسانی مقدار y را حساب می‌کنیم.

$$\log(y + 2) = 1 \Rightarrow \log_{10}^{(y+2)} = 1 \Rightarrow y + 2 = 10 \Rightarrow y = 8$$

y را در معادله دوم قرار داده و مقدار x را به دست می‌آوریم.

$$\log(y - x) + \log(4x + y) = 2 \Rightarrow \log(8 - x) + \log(4x + 8) = 2$$

$$\xrightarrow{\log a + \log b = \log ab} \log_{10}^{(8-x)(4x+8)} = 2 \Rightarrow (8 - x)(4x + 8) = 10^2 = 100$$

$$\Rightarrow -4x^2 + 24x + 64 = 100 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

با مساوی قرار دادن ضابطه‌های دو تابع مختصات نقطه تقاطع یعنی نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = 4^x \\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{4} \Rightarrow 4^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \xrightarrow{(*)} x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از توابع}} y = 2 \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$\Rightarrow \text{فاصله} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

حل معادله (*):

$$4^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{3}{4}, \quad a = 4^x$$

$$\Rightarrow a - \frac{1}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow a^2 - \frac{3}{4}a - 1 = 0 \Rightarrow (a - 2)\left(a + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{4} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

$$f(x) = \frac{v^x + \left(\frac{1}{v}\right)^x}{v} \xrightarrow{f^{-1}(v)=?} \frac{v^x + \left(\frac{1}{v}\right)^x}{v} = v$$

$$\Rightarrow v^x + \left(\frac{1}{v}\right)^x = v \Rightarrow v^x + \frac{1}{v^x} = v \xrightarrow{t=v^x} t + \frac{1}{t} = v$$

$$\Rightarrow t^v + 1 = vt \Rightarrow t^v - vt + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{v + \sqrt{12}}{2} = v + \sqrt{3} \\ t = \frac{v - \sqrt{12}}{2} = v - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$t = v^x \Rightarrow x = \log_v t \Rightarrow \begin{cases} x = \log_v^{(v+\sqrt{3})} \\ x = \log_v^{(v-\sqrt{3})} < 0 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

جواب $x = \log_v^{(v-\sqrt{3})}$ غیرقابل قبول است، زیرا دامنه $[0, +\infty)$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را ساده می‌کنیم تا بتوانیم به آسانی با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$f(x) = \log_v^{\frac{1}{x}} = \log_v^{x^{-1}} = -\log_v^x, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \log_v^{\frac{x}{v}} = \log_v^{x \cdot v^{-1}} = -\log_v^x, \quad D_g = (0, +\infty)$$

مشاهده می‌کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ضابطه‌های برابر و دامنه تعریف یکسان دارند. پس دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی هستند و نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

معادلات نمایی و لگاریتمی را به صورت ساده شده می نویسیم (از معادله لگاریتمی y را بر حسب x به دست می آوریم) با حل دستگاه دو معادله و دوجهول حاصل x و y را تعیین می کنیم.

گام دوم

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 + \log x$$

$$\Rightarrow \log y = \log 9x \Rightarrow y = 9x \quad (1)$$

$$2^{x-7} \times 3^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times 2^{2x+2y} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{3x+2y-7} = 1 = 2^0 \Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \xrightarrow{(1)} 3x + 18x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$$y = 9x \Rightarrow y = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

$$y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)} = \sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 2^x}$$

برای یافتن دامنه تعریف تابع به صورت زیر عمل می کنیم:

$$2^{\frac{1}{x}} - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \geq 2^x$$

اگر از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم، داریم:

$$\log_2 2^{\frac{1}{x}} \geq \log_2 2^x \Rightarrow \frac{1}{x} \geq x \Rightarrow x - \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \leq 0$$

x	-1	0	1
$\frac{x^2-1}{x}$	- 0 +	- 0 +	- 0 +

پس دامنه تعریف تابع عبارت است از: $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

راه حل اول:

$$y = -1 + \log_b^{(2(x + \frac{a}{2}))}$$

تابع به اندازه $\frac{1}{2} +$ نسبت به نمودار $y = \log x$ انتقال افقی به سمت راست داشته است. پس:

$$\frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$y = -1 + \log_b^{(2x-1)}$$

به علاوه مقدار تابع در $x = 2$ صفر است:

$$y(2) = -1 + \log_b^3 = 0 \Rightarrow \log_b^3 = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$y = -1 + \log_3^{(2x-1)} \xrightarrow{y=1 \text{ با } 1} -1 + \log_3^{(2x-1)} = 1$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2x-1)} = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 9 \Rightarrow x = 5$$

راه حل دوم: (برای به دست آوردن a و b)

$$y = -1 + \log_b^{(2x+a)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + a > 0 \Rightarrow x > -\frac{a}{2} \\ x > \frac{1}{2} : \text{طبق نمودار} \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1$$

$$(2, 0) \Rightarrow -1 + \log_b^3 = 0 \Rightarrow b = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

ابتدا با توجه به دو تساوی $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ ، مقادیر a و b را محاسبه می کنیم.

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times b^0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{32} \Rightarrow 2b^2 = 32 \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b>0} b = 4$$

بنابراین ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$ در می آید. مقدار $f(\frac{3}{2})$ برابر است با:

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 2^3 = \frac{3}{2} \times 8 = 3 \times 4 = 12$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

چون تابع از دو نقطه $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این نقاط در تابع صدق می‌کند، داریم:

$$(5, 11) \in f \Rightarrow 11 = a + \log_v^{(15+b)^r}$$

$$(21, 15) \in f \Rightarrow 15 = a + \log_v^{(6^3+b)^r}$$

$$\begin{cases} 11 = a + \log_v^{(15+b)^r} \\ 15 = a + \log_v^{(6^3+b)^r} \end{cases} \Rightarrow \times(-1) \begin{cases} -11 + a = -\log_v^{(15+b)^r} \\ 15 - a = \log_v^{(6^3+b)^r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r = \log_v^{(6^3+b)^r} - \log_v^{(15+b)^r} \Rightarrow r = r \log_v^{(6^3+b)} - r \log_v^{(15+b)}$$

$$\Rightarrow r = r(\log_v^{(6^3+b)} - \log_v^{(15+b)}) \Rightarrow r = \log_v^{\frac{6^3+b}{15+b}} \Rightarrow \frac{6^3+b}{15+b} = r$$

$$\Rightarrow 6^3 + b = 6 \cdot 0 + r b \Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$11 = a + \log_v^{(15+b)^r} \xrightarrow{b=1} 11 = a + \log_v^{(16)^r}$$

$$\Rightarrow 11 - a = \lambda \Rightarrow a = 3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

اگر باد اولیه قایق را x در نظر بگیریم آنگاه در روز n ام باد قایق $x(0/95)^n$ خواهد بود.

$$x(0/95)^n = \frac{x}{r} \Rightarrow \left(\frac{95}{100}\right)^n = \frac{1}{r} \Rightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^n = r \Rightarrow n(\log 19 - \log 20) = \log r \Rightarrow n = \frac{0/301}{1/301 - 1/287} = 21/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

با استفاده از ویژگی‌های $\log_b^a + \log_b^c = \log_b^{ac}$ و $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$ معادله را حل می‌کنیم:

$$\log_v^{(5x+1)} + \log_v^x = 2 \Rightarrow \log_v^{(5x+1)x} = 2 \Rightarrow (5x+1)x = 2^2 = 4 \Rightarrow 5x^2 + x = 4$$

$$\Rightarrow 5x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow (5x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-4=0 \Rightarrow 5x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{5} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$x = -1$ به این دلیل قابل قبول نیست که عدد جلوی لگاریتم نباید منفی شود. اگر $x = \frac{4}{5}$ باشد، مقدار $\frac{4}{x}$ برابر ۵ به دست می‌آید.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

$$\log_p 3 + 1 < \log_p \frac{1}{12 + \sqrt{[x]} - [x]} < \log_p 5 + 1$$

$$\Rightarrow 6 < 12 + \sqrt{[x]} - [x] < 10 \xrightarrow{[x]=A} \begin{cases} \sqrt{A} - A + 2 < 0 \\ \sqrt{A} - A + 6 > 0 \end{cases}$$

$$(\sqrt{A} + 1)(\sqrt{A} - 2) > 0 \Rightarrow \sqrt{A} - 2 > 0 \Rightarrow A > 4$$

$$\Rightarrow [x] > 4 \Rightarrow x \geq 5 \quad (1)$$

$$(\sqrt{A} - 3)(\sqrt{A} + 2) < 0 \Rightarrow \sqrt{A} - 3 < 0 \Rightarrow 0 \leq A < 9$$

$$\Rightarrow 0 \leq [x] < 9 \Rightarrow 0 \leq x < 9 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر (۹, ۵] است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

$$f(x) = \frac{p^x - \left(\frac{1}{p}\right)^x}{p} \xrightarrow{f^{-1}(p)=?} \frac{p^x - \left(\frac{1}{p}\right)^x}{p} = p$$

$$\Rightarrow p^x - \frac{1}{p^x} = p \xrightarrow{t=p^x} t - \frac{1}{t} = p \Rightarrow t^2 - 1 = pt$$

$$\Rightarrow t^2 - pt - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = p^2 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{p + p\sqrt{5}}{2} = p + \sqrt{5} \\ t = \frac{p - p\sqrt{5}}{2} = p - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$t = p^x \Rightarrow x = \log_p t \Rightarrow \begin{cases} x = \log_p^{(p+\sqrt{5})} \\ x = \log_p^{(p-\sqrt{5})} < 0 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

جواب $x = \log_p^{(p-\sqrt{5})}$ غیرقابل قبول است، زیرا $p - \sqrt{5} < 0$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\frac{3^x(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5)}{3^x(2^{-2} + 2^{-1} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3)} = 52$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{52 \times 15/75}{364} = \frac{119}{364} = 2/25 \Rightarrow x = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

مقدار اولیه عنصر ۲۴ گرم است. همچنین پس از گذشت ۳۰ روز، $\frac{1}{10}$ باقی مانده را ازدست می‌دهد، پس هر ماه مقدار عنصر $\frac{9}{10}$ برابر می‌شود. پس از گذشت n ماه داریم:

$$f(n) = 24\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

طبق مفروضات مسئله داریم:

$$8 = 24\left(\frac{9}{10}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{3}$$

از طرفین $\log_{10}$ می‌گیریم:

$$\begin{aligned} n(\log(\frac{9}{10})) &= \log(\frac{1}{3}) \Rightarrow n(\log 9 - \log 10) = \log(\frac{1}{3}) \\ \Rightarrow n(2 \log 3 - \log 10) &= -\log 3 \Rightarrow n(2 \times 0.48 - 1) = -0.48 \\ \Rightarrow n(0.96 - 1) &= -0.48 \Rightarrow 0.04n = 0.48 \Rightarrow n = 12 \end{aligned}$$

پس ۱۲ ماه یعنی $12 \times 30 = 360$ روز زمان نیاز است. (یک ماه را برابر ۳۰ روز در نظر گرفتیم.)

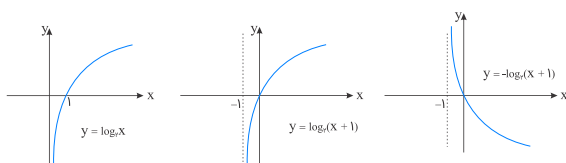
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} \log(2x - 5) + \log(x + 1) &= \log(4x - 1) \Rightarrow \log(2x - 5)(x + 1) = \log(4x - 1) \\ \Rightarrow 2x^2 + 2x - 5x - 5 &= 4x - 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & (\text{ق.ق}) \\ x = -\frac{1}{2} & (\text{غ.ق.ق}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\log_3^{(2x+1)} = \log_3^{(2 \times 4 + 1)} = \log_3^9 = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

به کمک انتقال و قرینه نمودار تابع $\log_v^x$ ، به راحتی به جواب می‌رسیم.



$$y = -\log_v^{(x+1)} = \log_v^{(x+1)^{-1}} \Rightarrow U(x) = (x+1)^{-1}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس $ax + b > 0$ بوده و $x > -\frac{b}{a}$ می‌شود. از طریق مقایسه با مقادیر قابل قبول برای x ، رابطه بین a و b مشخص می‌شود.

ب) $f(4) = 2$ است. با حل دو معادله و دو مجهول داده شده مقادیر a و b مشخص شده و در نهایت $f(-\frac{4}{9})$ حساب می‌شود.

گام دوم

$$x > -\frac{b}{a}, x \in (-\frac{1}{9}, +\infty) \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{1}{9} \Rightarrow a = 9b \quad (I)$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow \log_3^{(4a+b)} = 2 \Rightarrow 4a + b = 3^2 = 9 \Rightarrow 4a + b = 9$$

$$\xrightarrow{(I)} 4(9b) + b = 9 \Rightarrow 36b + b = 9 \Rightarrow 37b = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{37} \xrightarrow{(I)} a = 9$$

پس ضابطه تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \log_3^{(9x+1)}$ به دست آمد. حالا $f(-\frac{4}{9})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-\frac{4}{9}) = \log_3^{(-\frac{4}{9}+1)} = \log_3^{\frac{1}{9}} = \log_3^{3^{-2}} = -2 \log_3 3 = -2$$

ابتدا نقاط مشترک دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = x^x - x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0) \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(2, 2) \end{cases}$$

$$A \in f \Rightarrow -2 + \left(\frac{1}{9}\right)^{A+B} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{A+B} = 2 \Rightarrow A + B = -1 \quad (1)$$

$$B \in f \Rightarrow -2 + \left(\frac{1}{9}\right)^{2A+B} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{2A+B} = 4 \Rightarrow 2A + B = -2 \quad (2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B = -2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} A = -1, B = 0$$

تابع به فرم $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{9}\right)^{-x}$ خلاصه می‌شود.

$$f(3) = -2 + \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} = -2 + 8 = 6$$

دو عبارت لگاریتمی $\log_{21} 147$ و $\log_{21} 1323$ را برحسب $\log_{21} 3$ می‌نویسیم:
جای ۱۴۷، می‌توانیم $\frac{441}{3}$ بنویسیم که خود ۴۴۱ هم 21^2 است.

$$\log_{21} 147 = \log_{21} \frac{441}{3} = \log_{21} 21^2 - \log_{21} 3 = 2 - \log_{21} 3$$

عدد 1323 هم 3×441 است:

$$\log_{21} 1323 = \log_{21} (21^2 \times 3) = \log_{21} 21^2 + \log_{21} 3 = 2 + \log_{21} 3$$

پس:

$$(\log_{21} (3))^2 + \log_{21} (147) \log_{21} (1323) = (\log_{21} 3)^2 + (2 - \log_{21} 3)(2 + \log_{21} 3)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\log_{21} 3)^2 + 4 - (\log_{21} 3)^2 = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$2^{x+3+|x+3|} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x+3+|x+3|} = 2$$

$$\Rightarrow x + 3 + |x + 3| = 1 \Rightarrow |x + 3| = -x - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = -x - 2 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \\ x + 3 = x + 2 \Rightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 5} 0 \leq 5 \sin^2 x \leq 5 \xrightarrow{-1} -1 \leq 5 \sin^2 x - 1 \leq 4$$

$$\xrightarrow{5 \sin^2 x - 1 \geq 0} 0 \leq 5 \sin^2 x - 1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{5 \sin^2 x - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \geq -\sqrt{5 \sin^2 x - 1} \geq -2 \Rightarrow 2^0 \geq 2^{-\sqrt{5 \sin^2 x - 1}} \geq 2^{-2}$$

$$\Rightarrow 1 \geq f(x) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{5}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

معادله توانی را با استفاده از تغییر متغیر $2^x = t$ حل می کنیم. توجه داشته باشید که مقدار 2^x همیشه مثبت است.

$$\begin{aligned} 4^x + 2^x &= 72 \Rightarrow (2^2)^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x = 72 \xrightarrow{2^x=t} t^2 + t = 72 \\ \Rightarrow t^2 + t - 72 &= 0 \Rightarrow (t+9)(t-8) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t = -9 & \text{غ.ق.ق} \\ t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

حال که مقدار x را به دست آوردیم آن را در معادله لگاریتمی قرار داده و با استفاده از ویژگی های لگاریتم، مقدار y را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \log(x+1) + \log(2y+x^2) &= 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y+9) = 2 \\ \xrightarrow{\log a + \log b = \log ab} \log_{10} 4(2y+9) &= 2 \xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} 4(2y+9) = 10^2 = 100 \\ \Rightarrow 2y+9 &= 25 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

برای تعیین محدوده x ، از دو طرف نامعادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم. هم چنین در ساده کردن نامعادله داده شده از ویژگی $\log a^n = n \log a$ استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} 2^{-x} < 0.000001 \Rightarrow 2^{-x} < 10^{-6} \xrightarrow{\text{از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم}} \log 2^{-x} < \log 10^{-6} \\ \xrightarrow{\log a^n = n \log a} -x \log 2 < -6 \log 10 \xrightarrow{\log 10=1} -x \log 2 < -6 \xrightarrow{\times(-1)} x \log 2 > 6 \end{aligned}$$

در صورت سؤال $\log 2 = 0.301$ فرض شده است. بنابراین داریم:

$$x(0.301) > 6 \Rightarrow x\left(\frac{301}{1000}\right) > 6 \Rightarrow x > \frac{6000}{301} \Rightarrow x > 19.933$$

پس کوچک ترین مقدار x با دو رقم اعشار برابر $19/94$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

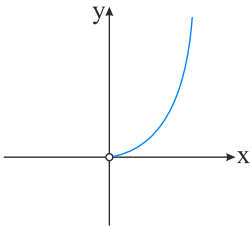
$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 > 0 &\Rightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \quad (1) \\ x^2 - 1 \geq 0 &\Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \quad (2) \end{aligned}$$

اشتراک جواب های به دست آمده $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

دامنه تابع $x > 0$ است.

$$f(x) = 9^{\log_3 x} = x^{\log_3 9} = x^2$$



جواب در گزینه‌ها نیست، احتمالاً منظورشان گزینه ۲ بوده است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

بافرض $x = 9$ و تغییر متغیر $\log_a 9 = t$ معادله را تنظیم می‌کنیم:

$$2 \times \frac{1}{t} + \frac{1}{2}t = 2 \Rightarrow \frac{2}{t} + \frac{t}{2} = 2 \Rightarrow \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow 9 = a^2 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

برای حل تست گام های زیر را برمی داریم:

الف) مختصات دو نقطه A و B را در ضابطه تابع $f(x)$ قرار داده و مقادیر a و b را تعیین می کنیم.
ب) با مشخص شدن ضابطه $f(x)$ ، حاصل $f(-1)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = a(b)^x - 1 \xrightarrow{A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \frac{1}{2} = a(b)^{-\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{b} \quad (I)$$

$$f(x) = a(b)^x - 1 \xrightarrow{B(1, 11)} 11 = ab - 1 \Rightarrow ab = 12 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{3}{2}\sqrt{b} \times b = 12 \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8 \Rightarrow \sqrt{b^3} = 8$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} b^3 = 64 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{(II)} 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

پس ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = 3(4)^x - 1$ در می آید. $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1) = 3(4)^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

باتوجه به شکل، دو نقطه $(-\frac{1}{3}, 0)$ و $(0, -2)$ در تابع f صدق می کنند. بنابراین:

$$(0, -2) : f(0) = -2 \Rightarrow -4 + 2^b = -2 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$(-\frac{1}{3}, 0) : f(-\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow -4 + 2^{-\frac{1}{3}a+1} = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{1}{3}a+1} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}a + 1 = 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow a = -3$$

با جایگذاری مقادیر a و b در تابع f داریم:

$$f(x) = -4 + 2^{-3x+1}$$

$$f(-\frac{5}{3}) = -4 + 2^{-3 \times (-\frac{5}{3})+1} = -4 + 2^{6+1} = -4 + 2^7 = -4 + 128 = 124$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\log_x^{(3x+8)} + \log_x^{(x-6)} = 2 \Rightarrow \log_x^{(3x+8)(x-6)} = 2 \Rightarrow x^2 = 3x^2 - 10x - 48 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \Rightarrow \log_8^8 = \log_{2^3}^{2^3} = \frac{3}{2} \\ x=-3 \text{ غق} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی باشند باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱) D_f = D_g$$

$$۲) \forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

حالا این دو شرط را برای هر زوج تابع $f(x)$ و $g(x)$ در گزینه های داده شده بررسی می کنیم.
بررسی گزینه اول:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt[3]{\log x} \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ g(x) = \log x^3 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه دوم:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه سوم:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (\sqrt{x})^3 \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ g(x) = x \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه چهارم:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

هر دو تابع به ازای مقادیر مثبت برابر ۱ و به ازای مقادیر منفی برابر -۱ می شوند، پس برابرند.

با استفاده از ویژگی $\log A^n = n \log A$ ابتدا مقدار K را محاسبه می‌کنیم.

$$\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log (\lambda)^K \Rightarrow \log 3 + \log 3^{\frac{1}{4}} = \log (3^4)^K = \log 3^{4K}$$

$$\xrightarrow{\log A^n = n \log A} \log 3 + \frac{1}{4} \log 3 = 4K \log 3 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{4}\right) \log 3 = 4K \log 3$$

$$\Rightarrow 4K = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow K = \frac{5}{16} \text{ یا } \frac{5}{K} = 16$$

اکنون حاصل لگاریتم $\frac{5}{K}$ در پایه ۲ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_2^{\frac{5}{K}} = \log_2^{\frac{5}{16}} = \log_2^{2^4} = 4 \log_2^2 = 4 \times 1 = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

فرض می‌کنیم $\log_y x = t$ باشد:

$$\frac{1}{t} - 2t = 1 \Rightarrow 1 - 2t^2 = t \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1, \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{x, y > 1} \log_y x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x^2 = y$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

نکته:

$$۱) \log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b} (x > 0, x \neq 1)$$

$$۲) \log_a^{b^n} = n \log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_{18}^{\lambda} = \frac{\log_3^{\lambda}}{\log_3^{18}} = \frac{\log_3^{2^3}}{\log_3^2 + \log_3^9} = \frac{3 \log_3^2}{\log_3^2 + \log_3^{3^2}}$$

$$= \frac{3 \log_3^2}{\log_3^2 + \underbrace{2 \log_3^3}} = \frac{3 \left(\frac{5}{8}\right)}{\frac{5}{8} + 2} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

با استفاده از ویژگی $\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$ ، معادله لگاریتمی را ساده کرده و مقدار xy را حساب می کنیم.

$$\log_3^x + \log_3^y = 2 \Rightarrow \log_3^{xy} = 2 \xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} xy = 3^2 = 9$$

مقادیر $x^2 + y^2$ و xy را داریم. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای و با توجه به این که x و y هر دو مثبت هستند، حاصل $x + y$ را محاسبه می کنیم.

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \xrightarrow{xy=9, x^2+y^2=46} (x + y)^2 = 46 + 18 = 64$$

$$\xrightarrow{x, y > 0} x + y = \sqrt{64} = 8 \log_8^{(x+y)} = \log_8^8 = \log_{8^2}^8 = \log_{64}^8 = \frac{3}{2} \log_8^8 = \frac{3}{2} = 1.5$$

عدد جلوی لگاریتم

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

$$3^{x^2-2} = 81^x \Rightarrow 3^{x^2-2} = 3^{4x} \Rightarrow x^2 - 2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 6 \Rightarrow (x - 2)^2 = 6 \Rightarrow x - 2 = \sqrt{6}$$

حاصل $\log_6^{(x-2)}$ را می خواهیم:

$$\log_6^{(x-2)} = \log_6^{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\log_3^{(2x^2+1)} - \log_3^{(x+2)} = 1 \Rightarrow \log_3^{\frac{2x^2+1}{x+2}} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow x = -1, \frac{10}{4}$$

چون باید $2x - 1 > 0$ باشد، بنابراین جواب $x = \frac{10}{4}$ قابل قبول است.

$$\log_8^{(2x-1)} = \log_8^{(\frac{10}{2}-1)} = \log_8^{\frac{3}{2}} = b \Rightarrow 8 = 8^b \Rightarrow 2^2 = 2^{3b} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

نکته:

$$۱) \log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$۲) \log_a^{b^n} = n \log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} / \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} / \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} / \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} / \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} / \frac{1}{2} \Rightarrow \log \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log \frac{1}{2} \quad (*)$$

سپس باتوجه به (*) مقدار $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} &= \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{3}} = \frac{\log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\log \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \log \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \log \frac{1}{2}} = \frac{(1 + \frac{1}{3}) \log \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \log \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

توجه کنید که برای به دست آوردن رابطه (*)، می‌توانستیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$\log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m} \log_a^b \quad \text{نکته:}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} / \frac{1}{2} \Rightarrow \log \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \Rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y} \Rightarrow 2x+y = 2+x-y \Rightarrow 2y = 2-x \quad (۱)$$

$$\log(x+2y) = 1 + \log y \Rightarrow \log(x+2y) - \log y = \log 10$$

$$\log \frac{(x+2y)}{y} = \log 10 \Rightarrow \frac{x+2y}{y} = 10 \Rightarrow x+2y = 10y \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)} x+2y = 10 \times (2y) \xrightarrow{(۱)} x+2-2x = 10(2-x) \Rightarrow x = \frac{18}{19} = \frac{1}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

یک رابطه فوق العاده مهم در مبحث لگاریتم وجود دارد که قبل از حل سؤال، ابتدا آن را بیان می کنیم:

$$\log 10 = 1 \Rightarrow \log 2 \times 5 = 1 \Rightarrow \log 2 + \log 5 = 1$$

پس همواره به خاطر داشته باشید که مجموع $\log 2$ و $\log 5$ برابر یک است. یعنی اگر در سؤالی یکی از این دو مورد داده شد، دیگری را هم به صورت غیر مستقیم به ما داده اند.

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{1/6} &= \log \sqrt[3]{\frac{16}{10}} = \log \sqrt[3]{\frac{8}{5}} = \log \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \log 2 - \log \sqrt[3]{5} = \log 2 - \log 5^{\frac{1}{3}} \\ &= \log 2 - \frac{1}{3} \log 5 \xrightarrow[\log 2 = 1 - 3k]{\log 5 = 3k} \log \sqrt[3]{1/6} = 1 - 3k - \frac{1}{3}(3k) = 1 - 3k - k = 1 - 4k \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

نقاط برخورد در ضابطه توابع $f(x) = A(2)^{Bx}$ و $fy = 5x$ صدق می کند.

$$fy = 5x \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow (2, \frac{5}{2}) \\ x = 4 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (4, 5) \end{cases}$$

$$f(x) = A(2)^{Bx} \Rightarrow \begin{cases} (2, \frac{5}{2}) : \frac{5}{2} = A(2)^{B \times 2} \Rightarrow 5 = 2A(2)^{2B} \\ (4, 5) : 5 = A(2)^{B \times 4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2A(2)^{2B} = A(2)^{4B} \Rightarrow 2^{2B+1} = 2^{4B} \Rightarrow 2B + 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$5 = A(2)^{4B} \xrightarrow{B=\frac{1}{2}} 5 = A(2)^2 \Rightarrow A = \frac{5}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{4}(2)^{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{5}{4}(2)^{\frac{x}{2}} = 10 \Rightarrow (2)^{\frac{x}{2}} = 8 = 2^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f^{-1}(10) = 6$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

برای آنکه دو تابع برابر باشند، باید دامنه‌های یکسانی داشته باشند. در این تست کافی است دامنه تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ را پیدا کنیم و با دامنه تک‌تک گزینه‌ها مقایسه کنیم.

$$y = \log \frac{x-2}{x} \Rightarrow \text{دامنه: } \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{یا} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۱: } y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \text{دامنه: } \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 2$$

$$\text{گزینه ۲: } y = \log \frac{x^2-4}{x(x+2)} = \log \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} > 0$$

در گزینه ۲ باید $x = -2$ باشد، پس دامنه آن با دامنه تابع اولیه مغایرت دارد.

$$\text{گزینه ۳: } y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 > 0 \Rightarrow x = 2, 0$$

$$\text{گزینه ۴: } y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \sqrt{\frac{x-2}{x}} > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{یا} \\ x < 0 \end{cases}$$

بنابراین فقط دامنه گزینه ۴ با دامنه تابع اولیه برابر است.

باتوجه به شکل، دو نقطه $(\frac{1}{3}, 0)$ و $(0, -6)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین:

$$(0, -6) : f(0) = -6 \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{0+b} = -6 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^b = 3$$

$$\Rightarrow 3^{-b} = 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right) : f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}a-1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}a-1} = 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}a-1} = 3^2 \Rightarrow 3^{-\frac{1}{3}a+1} = 3^2 \Rightarrow -\frac{1}{3}a + 1 = 2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow a = -3$$

مقادیر a و b را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} \Rightarrow f(2) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4-1} = -9 + 3^5$$

$$= -9 + 243 = 234$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

چون a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 10x + 0/1 = 0$ است، پس $ab = \frac{c}{a} = 0/1$ و $a + b = -\frac{b}{a} = 10$ است، حال داریم:

$$\log a + \log b - \log(a + b) = \log(ab) - \log(a + b) = \log(0/1) - \log(10) = -1 - 1 = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

در هر روز غلظت محلول $\frac{100-4}{100}$ یعنی $\frac{96}{100}$ غلظت روز قبل می‌شود، داریم:

$$a_n = a \left(\frac{96}{100} \right)^n$$

حال از معلومات سؤال نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} a \left(\frac{96}{100} \right)^n &= \frac{1}{3} a \Rightarrow n \log \left(\frac{96}{100} \right) = -\log 3 \Rightarrow n(\log 2^5 \times 3 - \log 10^2) = -\log 3 \\ \Rightarrow n(5 \log 2 + \log 3 - 2) &= -\log 3 \Rightarrow n(1/5 + 0/48 - 2) = -0/48 \Rightarrow n = \frac{-0/48}{-0/02} = 24 \end{aligned}$$

بنابراین پس از گذشت ۲۴ روز، غلظت محلول $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

نقاط مشترک دو تابع $C(1, 1)$ و $D(3, 9)$ است.

$$C \in f \Rightarrow 3^{A+B} = 1 \Rightarrow A + B = 0$$

$$D \in f \Rightarrow 3^{3A+B} = 9 \Rightarrow 3A + B = 2$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + B = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2A = 2 \Rightarrow A = 1, B = -1$$

$$f(x) = 3^{x-1} \Rightarrow f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

نکته: هر نقطه روی نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت $(\alpha, -\alpha)$ است.

$$\begin{cases} y(-1) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}^{(-a+b)} = 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^{(a+b)} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

$$\begin{aligned}\log_v(\mathfrak{x} + ۱۵) &= x + \mathfrak{v} \Rightarrow \mathfrak{x} + ۱۵ = v^{x+\mathfrak{v}} \\ \xrightarrow{v^x=t} t^v + ۱۵ &= \lambda t \Rightarrow t^v - \lambda t + ۱۵ = ۰ \\ \Rightarrow (t - \mathfrak{v})(t - ۵) &= ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = \mathfrak{v} = v^x \Rightarrow x = \log_v \mathfrak{v} \\ t = ۵ = v^x \Rightarrow x = \log_v ۵ \end{cases} \\ x_1 + x_v &= \log_v \mathfrak{v} + \log_v ۵ = \log_v ۱۵\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

مختصات دو نقطه $(۲, ۶)$ و $(۱۲, ۱۰)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند؛ بنابراین مختصات این دو نقطه را در ضابطه تابع جایگذاری کرده و مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\begin{aligned}f(\mathfrak{v}) &= ۶ \Rightarrow a + \log_v(v^b - ۴) = ۶ \Rightarrow \log_v(v^b - ۴) = ۶ - a \\ \Rightarrow v^{۶-a} &= v^b - ۴ \quad (۱) \\ f(۱۲) &= ۱۰ \Rightarrow a + \log_v(v^{۱۲b} - ۴) = ۱۰ \Rightarrow \log_v(v^{۱۲b} - ۴) = ۱۰ - a \\ \Rightarrow ۱۲b - ۴ &= v^{۱۰-a} \quad (۲)\end{aligned}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{v^{۶-a}}{v^{۱۰-a}} &= \frac{v^b - ۴}{v^{۱۲b} - ۴} \Rightarrow v^{-۴} = \frac{v^b - ۴}{v^{۱۲b} - ۴} \\ \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} &= \frac{v(b - ۲)}{۴(v^{۱۲b} - ۱)} \Rightarrow ۳b - ۱ = \lambda(b - ۲) \Rightarrow ۳b - ۱ = \lambda b - ۱۶ \\ \Rightarrow ۵b &= ۱۵ \Rightarrow b = ۳ \xrightarrow{(۲)} v^{۱۰-a} = ۳۲ = v^۵ \Rightarrow ۱۰ - a = ۵ \Rightarrow a = ۵\end{aligned}$$

$$\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(3x+1) \Rightarrow \log(x+2)(2x-1) = \log(3x+1) \\ \Rightarrow (x+2)(2x-1) = (3x+1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 4x - 2 = 3x + 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +\frac{3}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{3}{2}$ قابل قبول است.

$$\log_f^{(2x+5)} = \log_f^{(3+5)} = \log_{f^2}^{3^3} = \frac{3}{2} = 1/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

$$\log_a c + \log_b c = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} = 1 \Rightarrow \frac{\log_c b + \log_c a}{\log_c a \cdot \log_c b} = 1 \\ \Rightarrow \log_c a + \log_c b = (\log_c a)(\log_c b) \\ \Rightarrow (\log_c a)(\log_c b) = \log_c(ab)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

در حل تست به دو نکته زیر توجه داشته باشید:
الف) دامنه تعریف تابع $y = \log g(x)$ به صورت $g(x) > 0$ است.
ب) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است.

$$y = \log(x-1) \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (I) \\ f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)} \Rightarrow 1 - \log(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log(x-1) \leq 1 \\ \Rightarrow \log(x-1) \leq \log 10 \Rightarrow 0 < x-1 \leq 10 \Rightarrow 1 < x \leq 11 \quad (II)$$

دامنه تعریف تابع اصلی اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است:

$$(I) \cap (II) : D_f = (1, 11]$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید همواره مثبت باشد.
 ب) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید نامنفی باشد.

گام دوم

باتوجه به دو قسمت گام اول، مجموعه جواب را به دست آورده و بین آنها اشتراک می‌گیریم.

$$I) x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow x > 3 \text{ یا } x < 0$$

$$II) 1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \log(x^2 - 3x) \Rightarrow \log 10 \geq \log(x^2 - 3x)$$

$$\Rightarrow 10 \geq x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

اشتراک دو مجموعه جواب به دست آمده برابر $(3, 5] \cup [-2, 0)$ است.